模块一 集合（★☆）

强化训练

1．（2022·宜阳月考·★）集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x=\dfrac{16}{n},n\in\mathbf{N}\}$ 中的元素个数为（　　）

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6

答案：C

解析：分析可知 A 中的元素 x 为自然数，且 $x=\dfrac{16}{n}(n\in\mathbf{N})$，故考虑哪些自然数 n 能使 $\dfrac{16}{n}$ 也为自然数即可，

当且仅当 n 取 1，2，4，8，16 这些自然数时，$\dfrac{16}{n}$ 才是自然数，所以集合 A 中有 5 个元素.

2．（2022·广州模拟·★）已知集合 $A=\{a-2,a^2+4a,12\}$，且 $-3\in A$，则 a 的值为（　　）

（A）-3 或 -1　（B）-1　（C）3　（D）-3

答案：D

解析：-3 这个元素在集合 A 中，故依次考虑 A 中的每一个待定元素为 -3，

因为 $-3\in A$，所以 $a-2=-3$ 或 $a^2+4a=-3$，解得：$a=-1$ 或 -3；

注意还需代回去检验集合 A 是否满足元素互异，

当 $a=-1$ 时，$a-2=a^2+4a=-3$，不满足元素互异，舍去；

当 $a=-3$ 时，$A=\{-5,-3,12\}$，满足题意；综上所述，a 的值为 -3.

3．（2022·忻州月考·★★）已知 $m\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{R}$，若集合 $\{m,\dfrac{n}{m},1\}=\{m^2,m+n,0\}$，则 $m^{2023}+n^{2023}=$（　　）

（A）-2　（B）-1　（C）1　（D）2

答案：B

解析：两个集合中已经确定的元素分别是 1 和 0，其中 0 比较特殊，故分析在另一集合中谁是 0，

由题意，$0\in\{m,\dfrac{n}{m},1\}$，而 $m\neq 0$，所以 $\dfrac{n}{m}=0$，故 $n=0$，此时两个集合分别为 $\{m,0,1\}$，$\{m^2,m,0\}$，

对比可得 $m^2=1$，解得：$m=\pm 1$，还需检验是否满足元素互异，

经检验，当 $m=1$ 时，两个集合都不满足元素互异，所以 $m=-1$，故 $m^{2023}+n^{2023}=(-1)^{2023}+0^{2023}=-1$.

4．（2022·安徽模拟·★）已知集合 $A=\{1,2,m^2\}$，$B=\{1,m\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 m 的值为_____.

答案：2 或 0

解析：因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$，对比两集合的元素可得 $m=2$ 或 $m=m^2$，所以 $m=2$ 或 1 或 0，

还需检验是否满足元素互异，经检验，当 $m=1$ 时，A，B 都不满足元素互异；当 $m=2$ 或 0 时，满足题意.

【反思】 $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

5．（2023·山西模拟·★）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{y\mid y=x^2\}$，则 $A\cap B$ 的子集有（　　）

（A）2 个　（B）4 个　（C）8 个　（D）16 个

答案：C

解析：$x^2-x-6<0\Leftrightarrow(x+2)(x-3)<0\Leftrightarrow-2<x<3$，结合 $x\in\mathbf{Z}$ 可得 $A=\{-1,0,1,2\}$；

集合 B 中的元素用 y 表示，在 $y=x^2$ 中 y 的取值范围即为集合 B，

$y=x^2\geq 0\Rightarrow B=\{y\,|\,y\geq 0\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$，故 $A\cap B$ 的子集个数为 $2^3=8$.

6.（2023・江西模拟・★）已知集合 $A=\{-1,0\}$，$B=\{1,2\}$，则集合 $C=\{z\,|\,z=x^2+y^2,x\in A,y\in B\}$ 的真子集个数为（　　）

（A）3　（B）7　（C）15　（D）16

答案：C

解析：先分析集合 C，可将 x 和 y 所有可能的组合列表来看，

x	-1	-1	0	0
y	1	2	1	2
x^2+y^2	2	5	1	4

所以 $C=\{2,5,1,4\}$，C 中有 4 个元素 $\Rightarrow C$ 的真子集有 $2^4-1=15$ 个.

7.（2023・新高考 I 卷・★）已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\,|\,x^2-x-6\geq 0\}$，则 $M\cap N=$（　　）

（A）$\{-2,-1,0,1\}$　（B）$\{0,1,2\}$　（C）$\{-2\}$　（D）$\{2\}$

答案：C

解析：$x^2-x-6\geq 0\Leftrightarrow(x+2)(x-3)\geq 0\Leftrightarrow x\leq -2$ 或 $x\geq 3$，所以 $N=(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$，

又 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，所以 $M\cap N=\{-2\}$.

8.（2021・全国乙卷・★）已知集合 $S=\{s\,|\,s=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$T=\{t\,|\,t=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 $S\cap T=$（　　）

（A）$\varnothing$　（B）S　（C）T　（D）$\mathbf{Z}$

答案：C

解法 1：若看不出两个集合的公共部分，可列出部分元素来找规律，

集合 S 中的元素为 $\cdots,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,\cdots$，集合 T 中的元素为 $\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots$，

对比可发现 T 中的元素 S 中全部都有，所以 $T\subseteq S$，故 $S\cap T=T$.

解法 2：也可通过推理来得出 $T\subseteq S$，把 T 中的元素化为 S 中元素的形式即可，

对任意的 $t\in T$，可设 $t=4m+1$，其中 $m\in\mathbf{Z}$，则 $t=2\times 2m+1$，

记 $2m=n$，于是 $t=2n+1$，由 $m\in\mathbf{Z}$ 可得 $n=2m\in\mathbf{Z}$，所以 $t\in S$，从而 $T\subseteq S$，故 $S\cap T=T$.

9.（2022・全国乙卷・★）设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$，则（　　）

（A）$2\in M$　（B）$3\in M$　（C）$4\notin M$　（D）$5\notin M$

答案：A

解析：因为 $\complement_U M=\{1,3\}$，所以 $M=\complement_U(\complement_U M)=\{2,4,5\}$，故 $2\in M$.

【反思】设 A 是全集 U 任意的一个子集，则 $A=\complement_U(\complement_U A)$.

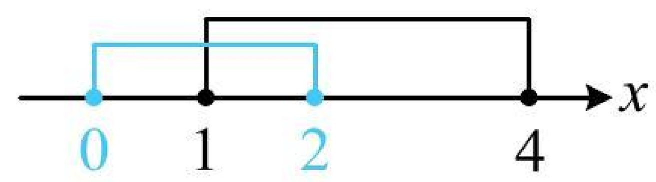
10．（2023•福建模拟•★）已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x||x-1|\le 1\}$，$B=\{x|\dfrac{x-4}{x-1}>0\}$，则$A\cap(\complement_U B)=$（　　）

（A）$[1,2]$　（B）$(1,2)$　（C）$[0,1)$　（D）$(1,2]$

答案：A

解析：$|x-1|\le 1\Leftrightarrow -1\le x-1\le 1\Leftrightarrow 0\le x\le 2$，所以$A=[0,2]$；

$\dfrac{x-4}{x-1}>0\Leftrightarrow (x-1)(x-4)>0\Leftrightarrow x<1$ 或 $x>4$，所以$B=(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$，故$\complement_U B=[1,4]$；如图，$A\cap(\complement_U B)=[1,2]$.



11．（2023•苏州模拟•★★）已知$f(x)=\sqrt{x^2-1}$的定义域为A，集合$B=\{x\in\mathbf{R}|1<ax<2\}$，若$B\subseteq A$，则实数$a$的取值范围是（　　）

（A）$[-2,1]$　（B）$[-1,1]$　（C）$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$　（D）$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

答案：B

解析：$x^2-1\ge 0\Rightarrow x^2\ge 1\Rightarrow x\le -1$或$x\ge 1$，所以$A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，

再求B，要解不等式$1<ax<2$，只需同除以a即可，但需讨论a的正负，

当$a=0$时，$\forall x\in\mathbf{R}$，$1<ax<2$都不成立，所以$B=\varnothing$，满足$B\subseteq A$；

当$a>0$时，由$1<ax<2$可得$\dfrac{1}{a}<x<\dfrac{2}{a}$，所以$B=(\dfrac{1}{a},\dfrac{2}{a})$，

注意到此时$\dfrac{1}{a}>0$，从而$B\subseteq A$的情况如图1，故$\dfrac{1}{a}\ge 1$，解得：$0<a\le 1$；

当$a<0$时，由$1<ax<2$可得$\dfrac{2}{a}<x<\dfrac{1}{a}$，所以$B=(\dfrac{2}{a},\dfrac{1}{a})$，

注意到此时$\dfrac{1}{a}<0$，从而$B\subseteq A$的情况如图2，故$\dfrac{1}{a}\le -1$，解得：$-1\le a<0$；

综上所述，实数a的取值范围是$[-1,1]$.

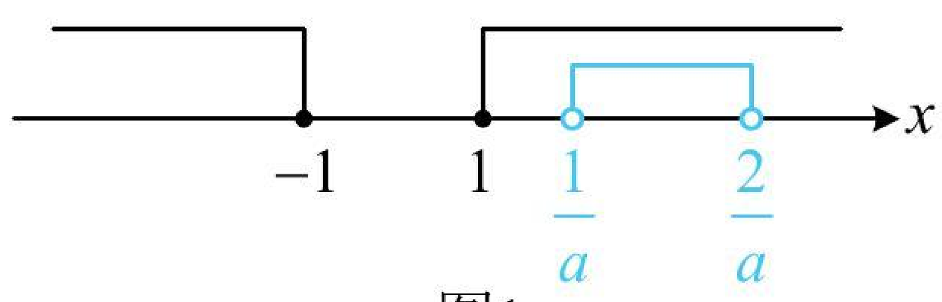


图1

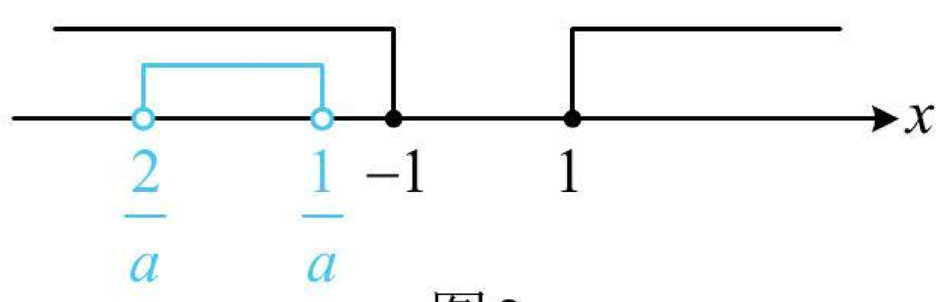


图2

12．（2023•扬州期末•★★）已知集合$A=\{x|\dfrac{4-x}{x+1}\ge 0\}$，$B=\{x|x^2-(a+1)^2x+2a(a^2+1)<0\}$，若$A\cap B=\varnothing$，则实数$a$的取值范围是（　　）

（A）$(2,+\infty)$　（B）$\{1\}\cup(2,+\infty)$　（C）$\{1\}\cup[2,+\infty)$　（D）$[2,+\infty)$

答案：C

解析：$\dfrac{4-x}{x+1}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}(4-x)(x+1)\ge 0\\ x+1\ne 0\end{cases}$，解得：$-1<x\le 4$，所以$A=(-1,4]$；

对于集合 B 中的不等式，若将常数项 $2a(a^2+1)$ 拆成 $-2a$ 和 $-(a^2+1)$，即可产生 $-(a+1)^2$，故能分解因式，

$x^2-(a+1)^2x+2a(a^2+1)<0 \Leftrightarrow (x-2a)(x-a^2-1)<0$ ①，要解此不等式，需比较 $2a$ 和 a^2+1 的大小，

因为 $a^2+1-2a=(a-1)^2\ge 0$，所以 $a^2+1\ge 2a$，其中 $a^2+1=2a$ 和 $a^2+1>2a$ 对应①的解集不同，又得讨论，

当 $a=1$ 时，不等式①即为 $(x-2)^2<0$，无解，所以 $B=\varnothing$，满足 $A\cap B=\varnothing$；

当 $a\ne 1$ 时，由①可得 $2a<x<a^2+1$，所以 $B=(2a,a^2+1)$，要看 A 与 B 何时交集为空集，可画数轴分析，

如图，要使 $A\cap B=\varnothing$，注意到 $a^2+1>0>-1$，所以不会出现图 1 所示的情形，只可能是图 2 的情形，

且端点 $2a$ 与 4 可以重合，重合时端点处也不是公共元素，所以 $2a\ge 4$，解得：$a\ge 2$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{1\}\cup[2,+\infty)$.

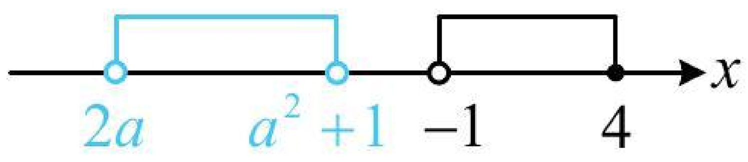


图1

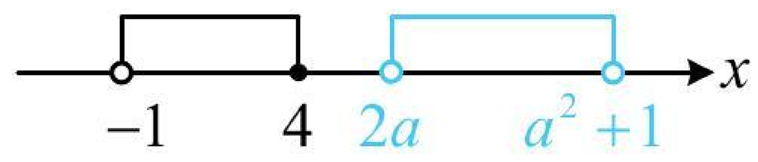
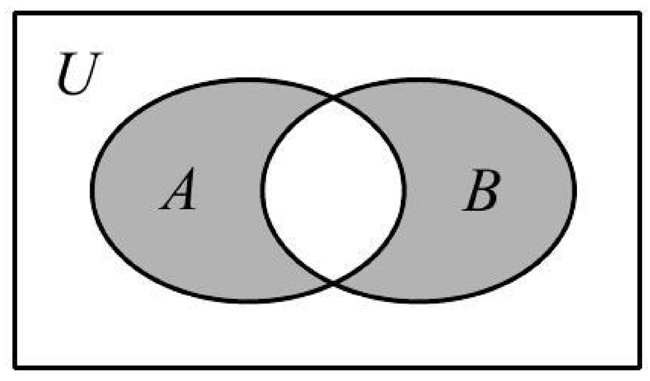


图2

13.（2023•扬州期末•★）集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{0,2,4\}$，则图中阴影部分所表示的集合为（　　）

（A）$\{0,2\}$　　（B）$\{-1,1,3,4\}$　　（C）$\{-1,0,2,4\}$　　（D）$\{-1,0,1,2,3,4\}$

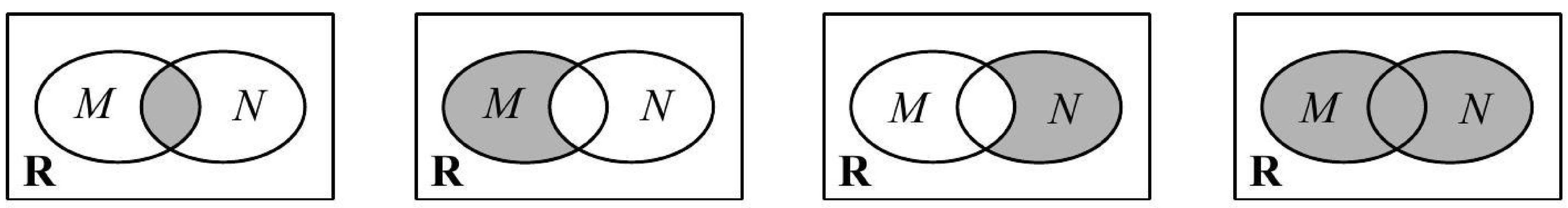


答案：B

解析：观察图形可得图中阴影部分表示在 $A\cup B$ 中把 $A\cap B$ 的部分去掉后余下的部分，

由题意，$A\cup B=\{-1,0,1,2,3,4\}$，$A\cap B=\{0,2\}$，所以阴影部分表示的集合为 $\{-1,1,3,4\}$.

14.（2023•广州一模•★★）已知集合 $M=\{x\,|\,x(x-2)<0\}$，$N=\{x\,|\,x-1<0\}$，则下列 Venn 图中，阴影部分可以表示集合 $\{x\,|\,1\le x<2\}$ 的是（　　）



(A)　(B)　(C)　(D)

答案：B

解析：$x(x-2)<0\Leftrightarrow 0<x<2$，所以 $M=\{x\,|\,0<x<2\}$，$x-1<0\Leftrightarrow x<1$，所以 $N=\{x\,|\,x<1\}$，

直接把 $\{x\,|\,1\le x<2\}$ 表示成 M，N 的运算结果较抽象，故考虑逐个验证选项，

A 项，阴影部分表示 $M\cap N=\{x\,|\,0<x<1\}$，故 A 项错误；

B 项，阴影部分表示在 M 中把 $M\cap N$ 去掉后余下的部分，为 $\{x\,|\,1\le x<2\}$，故 B 项正确；

C 项，阴影部分表示在 N 中把 $M\cap N$ 去掉后余下的部分，为 $\{x\,|\,x\le 0\}$，故 C 项错误；

D 项，阴影部分表示 $M\cup N=\{x\,|\,x<2\}$，故 D 项错误.

15.（2023•重庆模拟•★★）某班有 40 名同学参加数学、物理、化学课外研究小组，每名同学至多参加两个小组. 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26、15、13，同时参加数学和化学小组的有 6 人，

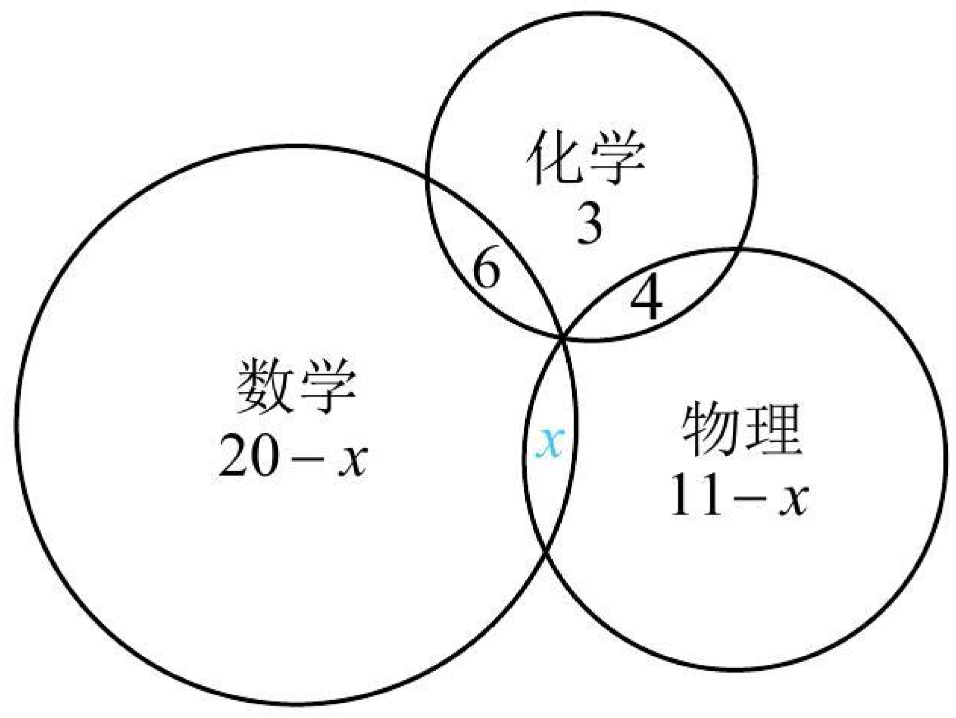
同时参加物理和化学小组的有 4 人，则同时参加数学和物理小组的人数为_____.

答案：4

解析：涉及三个小组，且彼此的人员有重叠，关系较复杂，可考虑画图分析，

如图，设同时参加数学和物理小组的人数为 x，则只参加数学、物理小组的分别有 $20-x$ 人，$11-x$ 人，

要求 x，可由总人数为 40 来建立方程并求解，由题意，$(20-x)+(11-x)+x+6+4+3=40$，解得：$x=4$.



16．（2022 • 长沙模拟 • ★★★）设 S 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集，若对任意的 $a,b\in S$（a，b 可以相等，也可以不相等），$a+b\in S$ 且 $a-b\in S$，则称 S 是“和谐集”．则下列说法中错误的是（　　）

（A）存在一个集合 S，它既是“和谐集”，又是有限集

（B）集合 $\{x\mid x=\sqrt{2}k,k\in\mathbf{Z}\}$ 是“和谐集”

（C）若 S_1，S_2 都是“和谐集”，则 $S_1\cap S_2\neq\varnothing$

（D）对任意两个不同的“和谐集” S_1，S_2，总有 $S_1\cup S_2=\mathbf{R}$

答案：D

解析：A 项，由条件中的“ $a-b\in S$ ”想到 $a=b$ 时的情形，所以元素 0 必在 S 中，故考虑集合 $\{0\}$，

设集合 $S=\{0\}$，则对任意的 $a,b\in S$，必有 $a=b=0$，所以 $a+b=a-b=0\in S$，

从而集合 S 是“和谐集”，S 也是有限集，故 A 项正确；

B 项，要分析所给集合是否为“和谐集”，验证它是否满足“和谐集”的定义即可，

记 $S=\{x\mid x=\sqrt{2}k,k\in\mathbf{Z}\}$，对任意的 $a,b\in S$，设 $a=\sqrt{2}k_1$，$b=\sqrt{2}k_2$，其中 k_1，$k_2\in\mathbf{Z}$，

则 $a+b=\sqrt{2}(k_1+k_2)$，$a-b=\sqrt{2}(k_1-k_2)$，因为 k_1+k_2 和 k_1-k_2 也都为整数，所以 $a+b\in S$，$a-b\in S$，

从而集合 S 是“和谐集”，故 B 项正确；

C 项，由前面的分析知任何一个“和谐集”中必有元素 0，所以 $S_1\cap S_2\neq\varnothing$，故 C 项正确；

D 项，正面推证较复杂，可尝试寻找反例，前面几个选项涉及到的两个“和谐集”就是反例，

记 $S_1=\{0\}$，$S_2=\{x\mid x=\sqrt{2}k,k\in\mathbf{Z}\}$，它们都是和谐集，而 $S_1\cup S_2\neq\mathbf{R}$，故 D 项错误.

17.（2022 •南京模拟 •★★★）对于集合 A，B，我们把集合 $\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$ 记作 $A\times B$．例如，$A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$，$C=\{1,3\}$，则 $A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$，$A\times C=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}$．现已知 $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，集合 A，B 是 M 的子集，且当 $(a,b)\in A\times B$ 时，$(b,a)\notin A\times B$，则 $A\times B$ 内的元素最多有（　　）个.

（A）20　（B）25　（C）50　（D）75

答案：B

解析：条件“当$(a,b)\in A\times B$时，$(b,a)\notin A\times B$”比较难懂，可结合题干举的例子来分析，观察发现 A 和 C 中都有元素 1，于是 $A\times C$ 中有元素 $(1,1)$，取 $a=b=1$ 即可发现这与上述条件矛盾；而 A 和 B 没有相同的元素，可以看到它能满足上述条件；

设 A 中有 m 个元素，B 中有 n 个元素，由“当$(a,b)\in A\times B$时，$(b,a)\notin A\times B$”可得 A 和 B 无相同元素，又因为 A，B 都是 M 的子集，且 M 有 10 个元素，所以 $m+n\le 10$，

要分析 $A\times B$ 中元素最多几个，需先把 $A\times B$ 元素个数用 m 和 n 表示，

设 A 中的元素为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，B 中的元素为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，将 $A\times B$ 中的元素列表如下：

	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
y_1	(x_1,y_1)	(x_2,y_1)	$\cdots$	(x_m,y_1)
y_2	(x_1,y_2)	(x_2,y_2)	$\cdots$	(x_m,y_2)
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_n	(x_1,y_n)	(x_2,y_n)	$\cdots$	(x_m,y_n)

由表可知 $A\times B$ 有 mn 个元素，因为 $mn\le(\frac{m+n}{2})^2\le 25$，

取等条件是 $m=n=5$，所以 $A\times B$ 内最多 25 个元素.